

---

# Capítulo 1

## Vectores

---

26 Problemas de selección - página 13  
(soluciones en la página 99)

21 Problemas de desarrollo - página 22  
(soluciones en la página 100)

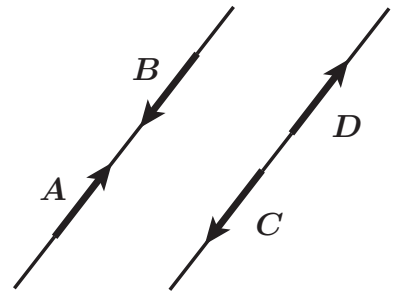


## Sección 1.A

## Problemas de selección

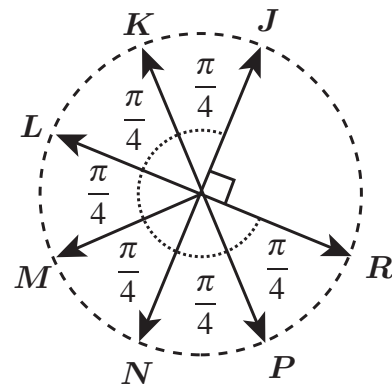
1. La figura muestra cuatro vectores de la misma magnitud que se encuentran sobre dos rectas paralelas. Se puede afirmar que:

- A)  $A = D$  y  $A + C = 0$ .  
 B) Los cuatro vectores son diferentes.  
 C) Los cuatro vectores son iguales.  
 D)  $A + B = 0$  y  $A \neq D$ .  
 E)  $C + D = 0$  y  $C \neq B$ .



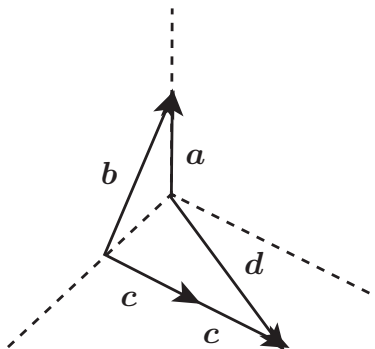
2. Los 7 vectores de la figura unen el centro de una circunferencia con algún punto de la misma. La suma de los 7 vectores de la figura

- A) es igual a  $-M$   
 B) es igual a  $J + N$   
 C) es igual a  $M$   
 D) igual a 0  
 E) no es ninguna de las otras opciones.



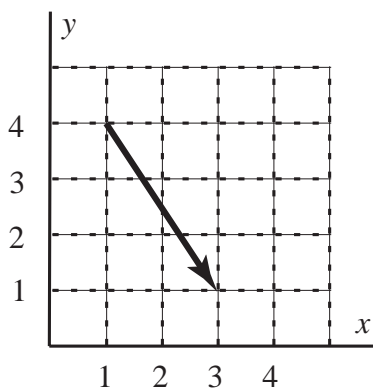
3. Dados los vectores de la figura se cumple que

- A)  $a + b + 2c + d = 0$   
 B)  $b + 2c = d + a$   
 C)  $d = a + b + c$   
 D)  $d = a + b + 2c$   
 E)  $b = 2c - d + a$



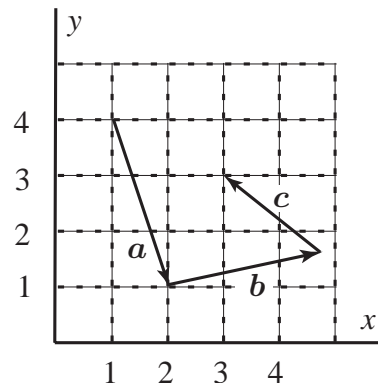
4. La expresión en cartesianas del vector de la figura es

- A)  $-2i + 3j$   
 B)  $+3i - 2j$   
 C)  $+3i + j$   
 D)  $+2i - 3j$   
 E)  $+3i + 4j$



5. El vector  $a + b + c$  es

- A)  $+3\hat{u}_x + 3\hat{u}_y$   
 B)  $-2\hat{u}_x + \hat{u}_y$   
 C)  $+2\hat{u}_x - \hat{u}_y$   
 D)  $+2\hat{u}_x + \hat{u}_y$   
 E)  $+\hat{u}_x + 4\hat{u}_y$



6. Sean los vectores  $\mathbf{H} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$  y  $\mathbf{M} = -4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ , se cumple que  $3\mathbf{H} - 2\mathbf{M}$  es igual a

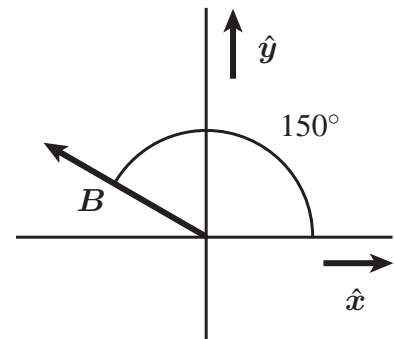
- A)  $15\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$   
 B)  $7\mathbf{i} + 12\mathbf{k}$   
 C)  $23\mathbf{i}$   
 D)  $15\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$   
 E) ninguna de las opciones anteriores.

7. Los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  satisfacen las ecuaciones:  $2\mathbf{a} - \mathbf{b} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  
 $-\mathbf{a} + \mathbf{b} = +\mathbf{i} + \mathbf{j}$ .  
 Se cumple entonces que el módulo de  $\mathbf{a}$  es igual a

- A) 5  
 B) 2  
 C)  $\sqrt{3}$   
 D) 1  
 E)  $\sqrt{5}$

8. El vector  $\mathbf{B}$  de la figura tiene un módulo de 60 cm/s. Su expresión en la base cartesiana y en unidades de m/s es

- A)  $\mathbf{B} = (-0.3\sqrt{3}\hat{\mathbf{x}} + 0.3\hat{\mathbf{y}})m/s$ .  
 B)  $\mathbf{B} = (-3000\sqrt{3}\hat{\mathbf{x}} + 3000\hat{\mathbf{y}})m/s$ .  
 C)  $\mathbf{B} = (-0.3\hat{\mathbf{x}} + 0.3\sqrt{3}\hat{\mathbf{y}})m/s$ .  
 D)  $\mathbf{B} = (-3000\hat{\mathbf{x}} + 3000\sqrt{3}\hat{\mathbf{y}})m/s$ .  
 E) ninguna de las otras opciones.



9. Sea  $\mathbf{G}$  un vector de módulo 4, de componentes positivas y tal que forma el mismo ángulo con cada eje cartesiano ( $\theta_x = \theta_y = \theta_z$ ). Se cumple entonces que

A)  $\mathbf{G} = 2\sqrt{2}(\hat{\mathbf{u}}_x + \hat{\mathbf{u}}_y + \hat{\mathbf{u}}_z)$

B)  $\mathbf{G} = (4\sqrt{3}/3)(\hat{\mathbf{u}}_x + \hat{\mathbf{u}}_y + \hat{\mathbf{u}}_z)$

C)  $\mathbf{G} = (\hat{\mathbf{u}}_x + \hat{\mathbf{u}}_y + \hat{\mathbf{u}}_z)$

D)  $\mathbf{G} = (4/3)(\hat{\mathbf{u}}_x + \hat{\mathbf{u}}_y + \hat{\mathbf{u}}_z)$

E) ninguna de las otras 4 opciones es cierta

---

10. El vector  $\mathbf{A}$  tiene módulo 4, sus componentes  $x$  e  $y$  son del mismo tamaño pero opuestas, cumple con  $\theta_z = 30^\circ$  y  $0 < \theta_x < \theta_y$  donde  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  son los ángulos entre  $\mathbf{A}$  y los semiejes positivos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente. El vector  $\mathbf{A}$  es igual a:

A)  $-\sqrt{2}\hat{\mathbf{u}}_x + \sqrt{2}\hat{\mathbf{u}}_y + 2\sqrt{3}\hat{\mathbf{u}}_z$

B)  $\sqrt{6}\hat{\mathbf{u}}_x - \sqrt{6}\hat{\mathbf{u}}_y + 2\hat{\mathbf{u}}_z$

C)  $2\hat{\mathbf{u}}_x - 2\hat{\mathbf{u}}_y + 2\sqrt{3}\hat{\mathbf{u}}_z$

D)  $\sqrt{2}\hat{\mathbf{u}}_x - \sqrt{2}\hat{\mathbf{u}}_y + 2\sqrt{3}\hat{\mathbf{u}}_z$

E)  $-2\sqrt{3}\hat{\mathbf{u}}_x + 2\sqrt{3}\hat{\mathbf{u}}_y + 2\hat{\mathbf{u}}_z$

---

11. Sea  $\alpha$  el ángulo entre los vectores  $\mathbf{D} = 3\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{z}}$  y  $\mathbf{N} = \hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}$ . Se cumple que

A)  $\cos(\alpha) = -1/\sqrt{5}$

B)  $\text{sen}(\alpha) = 3/(5\sqrt{5})$

C)  $\text{sen}(\alpha) = -1/\sqrt{5}$

D)  $\cos(\alpha) = 3/(5\sqrt{5})$

E)  $\cos(\alpha) = 2\sqrt{29}/(5\sqrt{5})$

---

---

12. Dos vectores tienen magnitudes 10 y 16 y el ángulo entre ellos es de  $30^\circ$ . Sea  $H$  la magnitud de la proyección del vector más corto sobre la línea que es perpendicular al más largo y se encuentra en el plano de los dos vectores. Entonces  $H$  es

- A) 8.
- B) 5.
- C) 0.
- D)  $5\sqrt{3}$ .
- E)  $8\sqrt{3}$ .

---

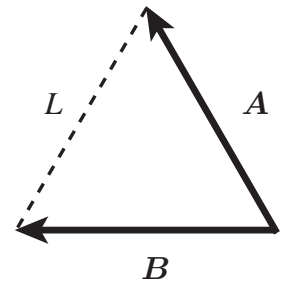
13. Sea  $\alpha$  el ángulo entre dos vectores  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{P}$  que satisfacen las relaciones  $|\mathbf{P} + \mathbf{R}| = \sqrt{3} |\mathbf{P}|$  y  $|\mathbf{P}| = |\mathbf{R}|$ . El  $\cos(\alpha)$  vale

- A)  $1/3$
- B)  $-7/8$
- C)  $-1/2$
- D)  $7/8$
- E)  $1/2$

---

14. Los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de la figura forman dos lados de un triángulo equilátero de lado  $L$ . El producto escalar de  $\mathbf{B}$  con  $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$  vale

- A)  $+3L^2/2$
- B)  $+L^2/2$
- C)  $-L^2/2$
- D)  $+\sqrt{3}L^2/2$
- E)  $-\sqrt{3}L^2/2$



15. Sean dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  que satisfacen la relación  $C = |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = 2|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$ . El producto escalar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  es igual a

- A)  $7C^2/8$ .
  - B)  $3C/4$ .
  - C)  $-7C^2/8$ .
  - D)  $C^2$ .
  - E)  $3C^2/4$ .
- 

16. Sean los vectores  $\mathbf{A} = (a\hat{x} - 3a\hat{y} + 4\hat{z})$  y  $\mathbf{B} = (-a\hat{x} + \hat{z})$ . Se cumple que

- A)  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares sólo si  $a = 5/3$ .
  - B)  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares sólo si  $a = 2$  o  $a = -2$ .
  - C) no existe valor de  $a$  para el cual  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  sean perpendiculares.
  - D)  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares sólo si  $a = 1$  o  $a = -4$ .
  - E)  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares si  $a = 0$ .
- 

17. Dados los vectores  $\mathbf{A} = \hat{x} - \hat{z}$  y  $\mathbf{B} = 2\hat{y} + 3\hat{z}$  se cumple que  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es igual a:

- A)  $-2\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$
  - B)  $2\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$
  - C)  $+3\hat{z}$
  - D)  $2\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}$
  - E)  $-3\hat{z}$
-



---

18. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**. Dados dos vectores cualesquiera  $A$  y  $B$  siempre se cumple que:

A)  $(A \times B) \cdot A = 0$

B)  $A \times (B \times A) = 0$

C)  $A \times (B \times B) = 0$

D)  $(A \times B) \times (B \times A) = 0$

E)  $A \cdot B - B \cdot A = 0$

---

19. Sea  $a = 2i - k$  y sea  $b$  un vector de módulo 3 y dirección según el eje  $y$  positivo. Se cumple que

A)  $a \times b = 3i + 6k$

B)  $|a \times b| = 0$

C)  $a \times b = -3i + 6k$

D)  $|a \times b| = 3$

E)  $a \times b = 6i - 3k$

---

20. Considere 3 vectores cualesquiera,  $F$ ,  $G$  y  $H$ . Diga cuál de las siguientes afirmaciones es **incorrecta**.

A) Si  $F + G + H = 0$ , entonces los tres vectores están en el mismo plano.B) Si  $|F + G| = |F| + |G|$ , entonces el ángulo entre  $F$  y  $G$  es cero.C) Si  $F \cdot G = F \cdot H$ , entonces  $F$  es perpendicular a  $G + H$ .

D)  $|(F \times G) \times F| = |G \times F| |F|$ .

E) Una de las otras 4 afirmaciones es falsa.

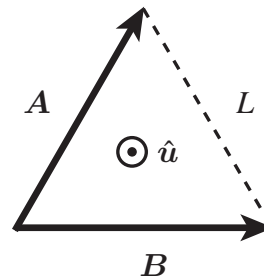
21. Sea  $\mathbf{W} \equiv \mathbf{V} \times \hat{\mathbf{u}}_z$ , donde  $\mathbf{V}$  es un vector variable, no nulo y paralelo al plano  $xy$ . Considere las siguientes tres afirmaciones:

- i)  $\mathbf{W}$  es perpendicular a  $\mathbf{V}$ ,                      ii)  $\mathbf{W}$  está en el plano  $xy$ ,                      iii)  $\mathbf{W}$  es unitario.  
Se cumple que

- A) sólo la afirmación i es siempre cierta.  
B) sólo la afirmación ii es siempre cierta.  
C) sólo las afirmaciones i y ii son siempre ciertas.  
D) las afirmaciones i, ii y iii son siempre ciertas.  
E) ninguna de las afirmaciones i, ii o iii es siempre cierta.

22. Los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de la figura forman dos lados de un triángulo equilátero de lado  $L$ . Llamaremos  $\hat{\mathbf{u}}$  al vector unitario perpendicular a la hoja y apuntando hacia afuera. El producto vectorial  $\mathbf{A} \times 2\mathbf{B}$  es igual a

- A)  $+L^2 \hat{\mathbf{u}}$   
B) ninguna de las otras 4 opciones es correcta.  
C)  $+\sqrt{3}L^2 \hat{\mathbf{u}}$   
D)  $-\sqrt{3}L^2 \hat{\mathbf{u}}/2$   
E)  $-\sqrt{3}L^2 \hat{\mathbf{u}}$



23. Sean dos vectores arbitrarios  $\mathbf{V}$  y  $\hat{\mathbf{u}}$  con  $|\hat{\mathbf{u}}| = 1$ . Se puede escribir que  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_{\perp}$  donde  $\mathbf{V}_{\parallel}$  es paralelo a  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\mathbf{V}_{\perp}$  es perpendicular a  $\hat{\mathbf{u}}$ . Se cumple que

- A)  $\mathbf{V}_{\parallel} = \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}}$     y     $\mathbf{V}_{\perp} = (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}}$ .  
B)  $\mathbf{V}_{\parallel} = |\mathbf{V}|^2 \hat{\mathbf{u}}$                       y     $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V} - |\mathbf{V}|^2 \hat{\mathbf{u}}$ .  
C)  $\mathbf{V}_{\parallel} = \mathbf{V} - \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{V}$                       y     $\mathbf{V}_{\perp} = \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{V}$ .  
D)  $\mathbf{V}_{\parallel} = (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}}$                       y     $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}}$ .  
E)  $\mathbf{V}_{\parallel} = \mathbf{V}$                                       y     $\mathbf{V}_{\perp} = 0$ .

---

24. Un plano contiene dos vectores no colineales  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Los vectores  $\mathbf{Z}$  que pertenecen al plano son aquéllos que cumplen:

- A)  $\mathbf{Z} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$
- B)  $\mathbf{Z} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$
- C)  $\mathbf{Z} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$
- D)  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{B} = 0$
- E)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{Z}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{Z}) = 0$

---

25. Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos del espacio cuyos vectores posición respecto al origen son  $\mathbf{r}_P$  y  $\mathbf{r}_Q$  respectivamente. Un plano infinito con vector normal  $\hat{\mathbf{n}}$  contiene al punto  $Q$ . Sea  $h$  la distancia de  $P$  al plano ( $h$  es la longitud de una línea perpendicular al plano que va desde éste a  $P$ ). Se cumple que

- A)  $h = |(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \cdot \hat{\mathbf{n}}|$ .
- B)  $h = 0$ .
- C)  $h = |(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \times \hat{\mathbf{n}}|$ .
- D)  $h = |\mathbf{r}_P \cdot \hat{\mathbf{n}}|$ .
- E) no hay suficientes datos para calcular  $h$ .

---

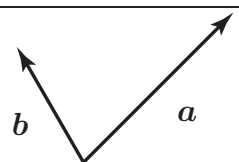
26. Un plano está determinado por tres puntos distintos con vectores de posición  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$  y  $\mathbf{Q}_3$ . Un punto con vector posición  $\mathbf{r}$  pertenece a este plano si y sólo si existen números reales  $\lambda$  y  $\mu$  que satisfacen la ecuación:

- A)  $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{Q}_2 + \mu \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_3$ .
- B)  $\mathbf{r} = \mathbf{Q}_1 + \lambda \mathbf{Q}_2 + \mu \mathbf{Q}_3$ .
- C)  $\mathbf{r} = \mathbf{Q}_3 + \lambda(\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1) + \mu(\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_2)$ .
- D)  $\mathbf{r} = \lambda(\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_1) + \mu(\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1)$ .
- E)  $\mathbf{r} = \mathbf{Q}_1 + \lambda(\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_1) + \mu(\mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_1)$ .

## Sección 1.B

## Problemas de desarrollo

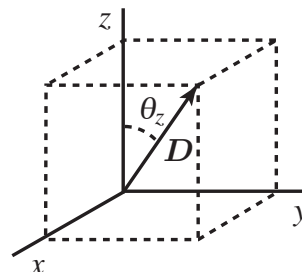
27. Dados los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  de la figura, dibuje el vector  $\mathbf{c}$  que satisface la ecuación  $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ .



28. Halle el vector  $\mathbf{A}$  que tiene módulo 2 km/h y es paralelo al vector  $\mathbf{D} = (4i\sqrt{3}j + 1k)$  cm.

29. Un vector  $\mathbf{A}$  tiene componentes cartesianas  $A_x = 1$ ,  $A_y = 1$  y  $A_z = 0$ . Halle los ángulos que forma el vector con los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (se puede contestar a esta pregunta sin hacer cálculos).

30. Halle el ángulo que forman la arista y la diagonal de un cubo que parten del mismo vértice.

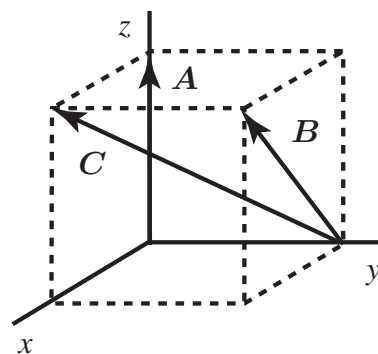


31. La figura muestra un cubo de arista  $l$  y tres vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ .

a. Halle las componentes cartesianas y los módulos de los vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ .

b. El ángulo entre los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  es igual al ángulo entre  $\mathbf{C}$  y el eje  $z$ ; halle este ángulo.

c. Halle gráfica y analíticamente la diferencia  $\mathbf{B} - \mathbf{C}$ .



32. Los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  satisfacen las siguientes ecuaciones vectoriales:

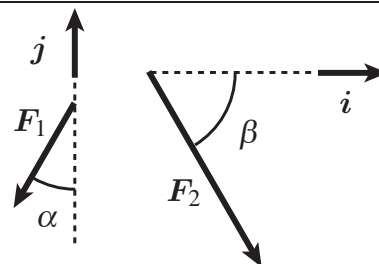
$$\text{i: } \mathbf{a} + \mathbf{b} = 4\hat{u}_x + \hat{u}_y$$

$$\text{ii: } \mathbf{a} - 2\mathbf{b} = \hat{u}_x + 4\hat{u}_y - 3\hat{u}_z$$

a. Halle los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

b. Calcule el vector unitario en la dirección de  $(\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$ .

33. Sobre una partícula de masa  $M = 2$  kg actúan dos fuerzas  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$ . Ambos vectores fuerza son paralelos al plano  $xy$  y se muestran en la figura. Sus módulos son  $|\mathbf{F}_1| = 2$  Newton y  $|\mathbf{F}_2| = 4$  Newton, los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se suponen conocidos.



a. Halle las fuerzas  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  en la base cartesiana  $\{i, j\}$ .

b. Para el caso particular  $\alpha = 30^\circ$  y  $\beta = 60^\circ$  calcule: el módulo de la fuerza neta  $\mathbf{F}_{\text{neta}} \equiv \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  y la componente  $x$  del vector aceleración  $\mathbf{a}$ .

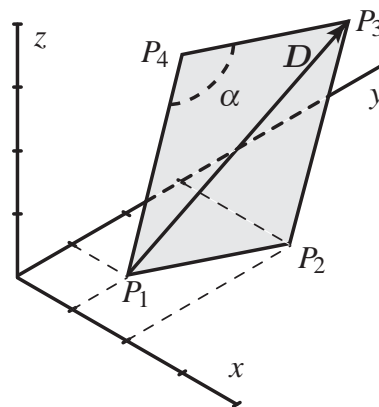
**Nota:** Use el hecho de que la aceleración de la partícula satisface la ecuación  $\mathbf{F}_{\text{neta}} = M\mathbf{a}$ .

34. Sean dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  que satisfacen las siguientes condiciones:  $\mathbf{a}$  es perpendicular al plano  $yz$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 7\hat{x} - 3\hat{y} + 5\hat{z}$ . Determine los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

35. La figura muestra un paralelogramo con vértices en los puntos  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ .

Se conocen las coordenadas cartesianas de los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , y las componentes del vector  $\mathbf{D}$ :

$$P_1 = (1, 1, 0), \quad P_2 = (2, 3, 0), \quad \mathbf{D} = \hat{x} + 3\hat{y} + 3\hat{z}.$$



a. Se definen los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , el primero parte de  $P_1$  y llega a  $P_2$  y el segundo parte de  $P_4$  y llega a  $P_1$ . Encuentre las componentes de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

b. Halle las coordenadas de los puntos  $P_3$  y  $P_4$ .

c. Halle el ángulo  $\alpha$ .

36. Se tienen dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  tales que  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 2$  y  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$ .

a. Halle  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$  y el ángulo  $\alpha$  entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

b. Se construye un paralelogramo de tal forma que el vector  $\mathbf{a}$  coincide con uno de sus lados y el vector  $\mathbf{b}$  con una de sus diagonales. Determine el área  $A$  de dicho paralelogramo.

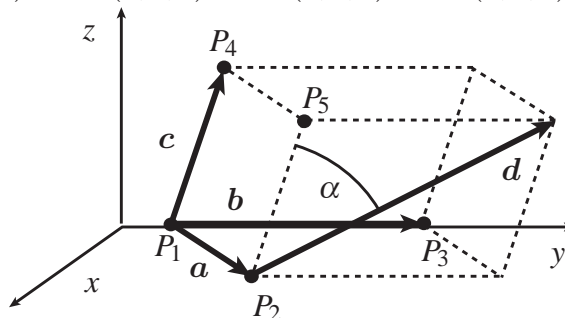
37. La figura muestra un paralelepípedo en un sistema de referencia cartesiano. Las coordenadas de algunos de sus vértices son conocidas:  $P_1 = (0, 1, 0)$ ;  $P_2 = (1, 2, 0)$ ;  $P_3 = (0, 4, 0)$ ;  $P_4 = (0, 2, 3)$ .

a. Halle las componentes cartesianas de los vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ .

b. Halle las componentes y módulo de  $\mathbf{d}$ .

c. Halle las coordenadas del punto  $P_5$  y el ángulo  $\alpha$ .

d. Halle el volumen del paralelepípedo.



38. Sean los vectores  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Calcule las componentes  $A_x$  y  $A_y$  sabiendo que el producto vectorial  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  está en el plano  $xy$  y  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 5$ .

39. Sean los vectores  $\mathbf{a} = a\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{b} = b\mathbf{j}$  y  $\mathbf{c} = c\mathbf{k}$ ; las cantidades  $a$ ,  $b$  y  $c$  se asumen conocidas. Considere el triángulo T cuyos tres vértices están en los puntos  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  (vértice 1),  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  (vértice 2) y  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{b} + \mathbf{c}$  (vértice 3).

a. Determine los tres vectores que unen los tres vértices de T:  $\mathbf{L}_1$  apunta del primero al segundo,  $\mathbf{L}_2$  del segundo al tercero y  $\mathbf{L}_3$  del tercero al primero.

b. Halle un vector normal al plano del triángulo T y encuentre la proyección de este vector sobre el eje  $z$ .

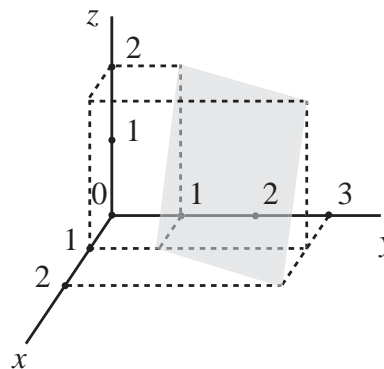
c. Calcule el área del triángulo T.

40. Sea  $\mathbf{A}$  un vector de módulo 2, paralelo al plano  $xz$ , de componente  $z$  positiva y que forma un ángulo de  $120^\circ$  con la dirección positiva del eje  $x$ .

a. Calcular las componentes del vector  $\mathbf{A}$  en la base canónica  $\{\hat{\mathbf{u}}_x, \hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z\}$ .

b. Hallar un vector de módulo 4 perpendicular al plano formado por los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{u}}_y + 2\hat{\mathbf{u}}_z$ .

41. Halle en la base  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  un vector unitario perpendicular al paralelogramo de la figura.



42. Considere una partícula de masa  $M = 1$  kg con vector posición en función del tiempo dado por

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \text{ m} + 3t\mathbf{j} \text{ m/s} - 4t^2\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$

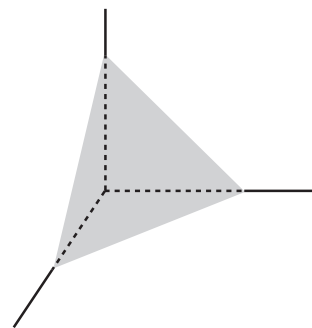
donde  $t$  es el tiempo, m indica metros y s segundos.

a. Los vectores velocidad y aceleración de la partícula se definen por  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  y  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  respectivamente. Halle los vectores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$  al instante  $t = (1/2)$  s.

b. La fuerza neta  $\mathbf{F}$  sobre una partícula satisface la ecuación  $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$  y la potencia de una fuerza se define por  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ . También definiremos la energía cinética de la partícula como  $T \equiv M|\mathbf{v}|^2/2$  y su momento angular por  $\mathbf{L} = M\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ .

Halle para el instante  $t = (1/2)$  s la potencia de la fuerza neta, la energía cinética de la partícula y su momento angular.

43. Sea el plano de ecuación  $x + y + z = 1$ . Encuentre un vector perpendicular al mismo y dibújelo.

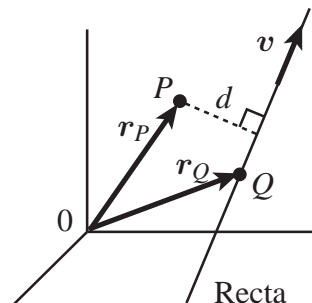


44. Diga cuál es la ecuación del plano que contiene a los puntos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$ , y  $(-2, 0, -2)$  (se puede contestar a esta pregunta sin hacer cálculos).

45. Una recta es paralela al vector  $v$  y pasa por el punto  $Q$  que tiene vector posición  $r_Q$ . Considere el punto  $P$  con vector posición  $r_P$ . Demuestre que la distancia del punto  $P$  a la recta es:

$$d = \frac{1}{|v|} | (r_P - r_Q) \times v |$$

Como ayuda se muestra un dibujo.



46. Los puntos  $r = (x, y, z)$  del espacio que satisfacen la ecuación  $ax + by + cz = d$  con  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  constantes forman un plano. La ecuación se denomina ecuación del plano en cartesianas. Esta ecuación también puede escribirse como  $(r - r_0) \cdot A = 0$  donde  $A$  es un vector constante y  $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$  es la posición de algún punto fijo del plano. Esta segunda ecuación se conoce como ecuación del plano en forma vectorial. El vector  $A$  no es único pero sí lo es su dirección.

- Encuentre en términos de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y  $d$  las componentes cartesianas del vector  $A$  y el producto  $r_0 \cdot A$ .
- ¿Qué orientación tiene el vector  $A$  respecto al plano?
- Halle la ecuación vectorial y la ecuación en cartesianas del plano que contiene el punto de coordenadas cartesianas  $(1, 3, -2)$  y es perpendicular al vector  $N = 2i - j + k$ .

47. La ecuación de un plano infinito puede escribirse vectorialmente como  $(r - r_0) \cdot N = 0$ , donde la variable  $r = (x, y, z)$  da la posición de los puntos del plano,  $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$  es la posición de algún punto fijo del mismo y  $N$  es un vector perpendicular al plano. Por otro lado un plano infinito queda bien definido si se conocen las posiciones de tres de sus puntos no colineales (esto es de tres puntos que no están en la misma recta).

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  las posiciones de tres puntos no colineales del plano  $\mathcal{P}$ .

- Halle tres vectores paralelos al plano  $\mathcal{P}$  que no sean paralelos entre sí.
- Halle un vector normal al plano  $\mathcal{P}$ .
- Escriba la ecuación vectorial del plano  $\mathcal{P}$ .
- Use el resultado de la parte **c** para hallar la ecuación del plano infinito que contiene a los puntos

$(2, 0, 0)$ ,  $(0, -2, 0)$  y  $(0, 0, 2)$ . Escriba la ecuación en la forma  $c_1x + c_2y + c_3z = c_4$  determinando los números  $c_i$ . Represente gráficamente el plano.

---



---

## **Capítulo 7**

### **Respuestas**

---

Aquí se dan las respuestas finales a todos los ejercicios propuestos en este libro.



## Sección 7.A

## Vectores (Selección)

	3 E	6 E	9 B	12 B
1 A	4 D	7 E	10 D	13 E
2 C	5 C	8 A	11 D	14 C

---

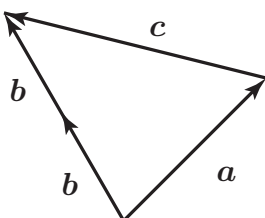
15 A	18 B	21 C	24 B	
16 B	19 A	22 E	25 A	
17 D	20 C	23 D	26 C	

---

## Sección 7.B

## Vectores (Desarrollo)

27.



28.

$$A = 2\text{km/h} \frac{D}{|D|} = (4\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 1\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{5}}\text{km/h}$$

29.

$$\theta_x = \theta_y = \pi/4 \text{ (por simetría),} \quad \theta_z = \pi/2$$

30. Por simetría los cosenos directores (a las tres aristas que salen del punto) cumplen  $\cos(\theta_x) = \cos(\theta_y) = \cos(\theta_z) = 1/\sqrt{3}$ , luego  $\theta_z = \arcsin(1/\sqrt{3})$ .

31.

a.

$$A = l\hat{z}, \quad B = l\hat{x} + l\hat{z}, \quad C = l\hat{x} - l\hat{y} + l\hat{z},$$

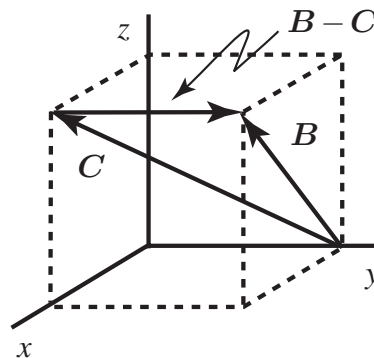
$$|A| = l, \quad |B| = l\sqrt{2}, \quad |C| = l\sqrt{3}$$

b.

$$\theta_z = \arcsin(C_z/|C|) = \arcsin(1/\sqrt{3})$$

c.

$$B - C = l\hat{y}$$



32.

a.

$$\mathbf{a} = 3\hat{u}_x + 2\hat{u}_y - \hat{u}_z, \quad \mathbf{b} = \hat{u}_x - \hat{u}_y + \hat{u}_z$$

b.

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{26}}(\hat{u}_x + 4\hat{u}_y - 3\hat{u}_z)$$


---

33.

a.

$$\mathbf{F}_1 = -2[\text{sen}(\alpha)\mathbf{i} + \text{cos}(\alpha)\mathbf{j}] \text{ Newton}, \quad \mathbf{F}_2 = 4[\text{cos}(\beta)\mathbf{i} - \text{sen}(\beta)\mathbf{j}] \text{ Newton}.$$

b.

$$|\mathbf{F}_{\text{neta}}| = 2\sqrt{7} \text{ Newton}, \quad a_x = \frac{1}{2} \text{ Newton/kg} = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2.$$


---

34. Hay dos soluciones:

i)

$$\mathbf{a} = 4\hat{x} \quad \mathbf{b} = 3\hat{x} - 3\hat{y} + 5\hat{z}.$$

ii)

$$\mathbf{a} = 3\hat{x} \quad \mathbf{b} = 4\hat{x} - 3\hat{y} + 5\hat{z}.$$


---

35.

a.

$$\mathbf{a} = \hat{x} + 2\hat{y}, \quad \mathbf{b} = -\hat{y} - 3\hat{z}$$

b.

$$P_3 = (2, 4, 3), \quad P_4 = (1, 2, 3)$$

c.

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$$


---

36.

a.

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 2, \quad \alpha = \pi/3$$

b.

$$A = 2\sqrt{3}$$


---

37.

a.

$$\mathbf{a} = P_2 - P_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{b} = P_3 - P_1 = (0, 3, 0), \quad \mathbf{c} = P_4 - P_1 = (0, 1, 3)$$

b.

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{c} = (0, 4, 3), \quad |\mathbf{d}| = 5$$

c.

$$P_5 = P_4 + \mathbf{a} = (1, 3, 3), \quad \alpha = \text{ángulo}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \arccos\left(\frac{13}{5\sqrt{10}}\right)$$

d.

$$\text{Volumen} = |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = 9$$


---

38.

$$A_x = 1, \quad A_y = -2$$


---

39.

a.

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = b\mathbf{j} - c\mathbf{k}, \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = c\mathbf{k} - a\mathbf{i}, \quad \mathbf{L}_3 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = a\mathbf{i} - b\mathbf{j}$$

b.

$$\mathbf{N} = \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2 = (bc\mathbf{i} + ac\mathbf{j} + ab\mathbf{k}), \quad \text{Proy}(\mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{k} = ab$$

c.

$$\text{Area} = \frac{1}{2} |\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2| = \frac{1}{2} \sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$$


---

40.

a.

$$\mathbf{A} = -\hat{\mathbf{u}}_x + \sqrt{3}\hat{\mathbf{u}}_z$$

b.

$$\sqrt{6}\hat{\mathbf{u}}_x - 2\sqrt{2}\hat{\mathbf{u}}_y + \sqrt{2}\hat{\mathbf{u}}_z$$


---

41.

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$


---

42.

a.

$$\mathbf{r} = \left( \mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - \mathbf{k} \right) \text{ m}, \quad \mathbf{v} = (3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \text{ m/s}, \quad \mathbf{a} = (-8\mathbf{k}) \text{ m/s}^2.$$

b.

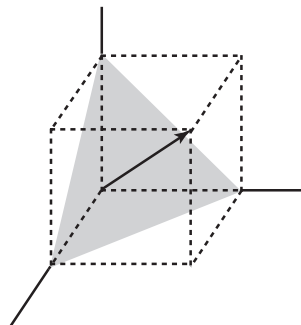
$$P = 32 \text{ kg m}^2/\text{s}^3 = 32 \text{ Joule/s}, \quad T = \frac{5}{2} \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = \frac{5}{2} \text{ Joule}$$

$$\mathbf{L} = (-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \text{ kg m}^2/\text{s}$$


---

43.

$$\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$



44.

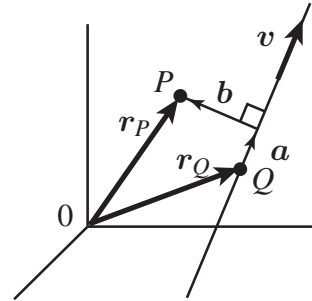
$$y = 0$$

45. Ayuda para la demostración:

note que  $r_P - r_Q = a + b$  luego

$$(r_P - r_Q) \times v = (a + b) \times v = b \times v \text{ por lo cual}$$

$$|(r_P - r_Q) \times v| = |b \times v| = |b||v| = d|v|.$$



46.

a.

$$A = ai + bj + ck, \quad r_0 \cdot A = d$$

b. El vector  $A$  es perpendicular al vector que une cualesquiera dos puntos del plano por lo tanto  $A$  es perpendicular al plano.

c.

$$(r - (1, 3, -2)) \cdot N = 0, \quad 2x - y + z = -3$$

47.

a.

$$D_1 = b - a, \quad D_2 = c - a, \quad D_3 = c - b$$

b.

$$N = a \times b + b \times c + c \times a$$

c.

$$(r - a) \cdot (a \times b + b \times c + c \times a) = 0$$

d.

$$x - y + z = 2.$$

